



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală
Județul Alba, 13 februarie 2015
Clasa a X-a

Problema 1.

a) Să se arate că $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0, (\forall)x \geq -1$.

b) Fie numerele reale $a, b, c > 1$. Să se arate că:

$$\log_a(b\sqrt{b} - 2b + 4) + \log_b(c\sqrt{c} - 2c + 4) + \log_c(a\sqrt{a} - 2a + 4) \geq 3.$$

Când avem egalitate?

Problema 2.

Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Se consideră o funcție injectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că funcția $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(\log_a x) + f(\log_b x)$ este constantă.

a) Să se arate că $a \cdot b = 1$.

b) Pentru $b = \frac{1}{a}$, să se dea un exemplu de funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care are proprietatea din enunț.

Problema 3.

Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $z^4 - az + 9 = 0$.

a) Arătați că $|z|^2(\bar{z}^2 + \bar{z} \cdot z + z^2) = 9$

b) Arătați că $|Re(z)| \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Problema 4.

Considerăm triunghiul ascuțitunghic ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și H ortocentrul triunghiului. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor HBC, HAC respectiv HAB . Dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4R$, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.